ACTES DE LES V TROBADES D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(BARCELONA, SCHCT, 2000), 143-148

POSSIBILITAT I CONVENIÈNCIA D'UNA APROXIMACIÓ HISTÒRICA A L'ENSENYAMENT DEL CÀLCUL VECTORIAL

Josep Manel Parra Serra
Departament de Física Fonamental (UB) i Laboratori de Física Matemàtica (IEC)

Paraules clau: *Nombres complexos, vectors, Clifford, Grassmann, Hamilton.*

About the possibility and opportunity of an historical approach to the teaching of vector calculus

Summary: *A full series of short excerpts from historical works is proposed as an effective tool for the design and actual teaching of vector calculus at a high school level. Physical and mathematical backgrounds are both improved and correlated.*

Key words: *Complex numbers, vectors, Clifford, Grassmann, Hamilton.*

Introducció

La superació dels reptes plantejats per l'actual reforma dels ensenyaments requereix una atenció especial a la selecció dels continguts i als mitjans idonis per a la seva transmissió. En passar al «tercer nivell de concreció» ens trobem davant de qüestions que no queden resoltes, ni tan sols adequadament plantejades, en els nivells de desplegament curricular normatiu. Qüestions rellevants pel que fa a la possibilitat d'oferir una educació científica de qualitat per al conjunt de la població.

Pretenem mostrar com, a partir d'una adequada selecció de textos científics, i del tractament d'algunes qüestions i problemes escollits, l'estudi del càlcul vectorial, realitzat en estreta connexió amb l'espai euclidià clàssic i l'espai-temps de la relativitat, pot esdevenir un d'aquests temes multidisciplinars o transversals que, com la conservació de l'energia, permet superar els estrets límits de l'especialisme i oferir una visió global del que és i suposa l'activitat científica. En la selecció de textos històrics que es proposen, en gran part continguts ja en PARRA (1993 i 1998), hi figuren tan sols els fragments que considerem imprescindibles perquè el professor es faci una idea clara de l'abast i natura del projecte i, si s'escau, propiciar la discussió sobre la seva realització pràctica. D'altra banda, a classe, procedirem a la lectura comentada de porcions més extenses, sempre dins el límit que imposa una fàcil intel·ligibilitat. Més enllà d'aquesta lectura i anàlisi dels fragments escollits, s'obren els horitzons sense límits propis de la recerca, sigui de tipus històric (CROWE, 1985) o estrictament científic. En resum, es tracta d'aplicar en aquest camp de tanta importància per a la matemàtica i la física, les idees exposades per Clifford Truesdell (1968): «I know young men who have read the works of Gibbs and Kelvin and Stokes and Cauchy, even of Euler and Newton, neither so as to decorate a paper of their own by an early reference nor to write a history, but in search of understanding and method, revealed by the speach of giants, untranslated by pygmies».

El nostre plantejament, per bé que contextualitzat com a matèria opcional o com a treball de recerca, s'oposa a les orientacions didàctiques «oficials» que no troben justificable introduir el producte vectorial a les matemàtiques del nou Batxillerat. Aquest fet fa que considerem necessària una breu defensa de la nostra posició en relació amb la didàctica de les matemàtiques. Bertrand Russell, en el pròleg al llibre de Clifford (1955: pàgs. vii-viii), planteja dues greus acusacions, a les quals cal fer front a l'hora d'establir el currículum: «... hi ha gent que no té cap desig d'entendre les matèries que tracta. Però crec que aquests podrien ser molts menys que els que un mal ensenyament ens fa creure que són. Els alumnes que no tenen una inusualment forta inclinació natural envers les matemàtiques són conduïts a odiar-les per dues mancances per part dels seus mestres. El primer és que la matemàtica no és exhibida com la base de tot el nostre coneixement científic, tant del teòric com del pràctic: a l'alumne no se li mostra de manera convincent que el que podem comprendre del món, i el que podem fer amb màquines, ho podem comprendre i fer en virtut de les matemàtiques. El segon defecte és que les dificultats ho són afrontades de manera gradual, com caldria, i no són minimitzades connectant-les amb uns principis centrals fàcilment aprehensibles, de manera que l'edifici de les matemàtiques es mostra a l'alumne com una col·lecció de barraques separades més que com un únic temple que comprèn un pla unitari».

Suposant que no sigui massa tard per aconseguir que els nostres alumnes de batxillerat descobreixin l'íntima connexió entre les matemàtiques i la imatge científica de l'univers que ens envolta, proposem una sèrie de lectures que mostren què hi ha darrere de la típica afirmació segons la qual hi ha dos tipus de magnituds físiques: escalars i vectors.

Lectures per a la motivació

Iniciarem el tema amb una lectura d'alguns paràgrafs de les cartes de Leibniz a Huygens, que posen de manifest com Leibniz considera necessària la creació d'una nova anàlisi matemàtica que permeti expressar directament, amb lletres, les magnituds i operacions geomètriques i físiques que involucren les relacions espacials. Per a Leibniz és clar que l'àlgebra, i fins i tot la geometria analítica cartesiana, tan sols tracten analíticament amb magnituds numèriques (PARRA, 1993: pàgs. 362-363).

Aquesta lectura de Leibniz pot anar seguida de la lectura d'alguna de les pàgines de la introducció al *Treatise on Electricity and Magnetism* on, motivat per les necessitats de representació i anàlisi dels fenòmens electromagnètics, Maxwell planteja la necessitat (i prioritat) de l'estudi i classificació d'aquestes magnituds orientades i es reafirma en una crítica ponderada de la geometria analítica cartesiana que encara avui és el paradigma dominant a l'ensenyament secundari (PARRA, 1993: pàg. 366).

Continuarem amb un fragment de les consideracions que el mateix Maxwell (1997) adreçà el 1870 a les seccions de Física i Matemàtica de la *British Association*. En elles exposa magistralment les relacions entre les matemàtiques i la física o, més exactament, la necessària complementarietat que en l'educació científica s'ha de procurar mantenir entre les concepcions científiques de matemàtics i físics. En particular, i com a objecció anticipada en més d'un segle a les poc raonades directrius del nou Batxillerat, insisteix en la rellevància del càlcul vectorial. Aquest és una eina valuosa tant per donar una resposta adequada a les dues crítiques de Russell com per assolir un dels objectius programàtics de la reforma: «... poderosíssim mètode de comunicar veritable coneixement científic a persones aparentment mancades d'esperit calculístic» (PARRA, 1998: pàgs. 623-624).

Amb les lectures anteriors, de dos veritables «gegants del pensament i de la ciència» cobrirem raonablement l'etapa romàntica o de motivació tan ben caracteritzada per A. N. Whitehead (1957), i que està destinada a proporcionar les «actituds i valors» que faran possible l'aprenentatge. Quin és el millor moment per procedir a aquestes lectures? En tot cas, no més tard del primer curs de batxillerat i abans de començar a treballar «tècnicament» amb els vectors.

Lectures per a conèixer a fons

Per a la segona etapa que Whitehead caracteritza com a tècnica, i en la qual s'han de proporcionar els «continguts i procediments», també podem fer un ús extensiu de la història. Presentem, doncs, diverses unitats amb els continguts, procediments i seleccions històriques que creiem més apropiades per a l'ensenyament del càlcul vectorial.

1. La construcció de l'espai vectorial de les translacions en el pla a partir d'una base cartesiana ortonormal. L'àlgebra geomètrica del pla. Els nombres complexos i la seva comprensió com a subàlgebra parella. Significat empíric de les diverses operacions de rotació-dilatació. Lectures de Hamilton, Argand i Wessel (GÁMEZ, 1999).

2. Transformacions geomètriques del pla: les rotacions i les simetries. Lectura d'algun passatge del *Programa d'Erlangen* de Félix Klein (1974) on es caracteritza una geometria pel seu grup de moviments, o una transcripció simplificada que posi èmfasi en aquest aspecte transformacional-operatiu. En tot cas, limitat a la geometria mètrica.

3. (2n curs, possiblement) L'àlgebra geomètrica de l'espai i els quaternions com a subàlgebra parella i com a cos numèric que estén els complexos. Amb suport experimental (n'hi ha prou amb uns daus de parxís i un mirall) realitzarem el producte de rotacions, introduirem els angles d'Euler, les simetries especulars i el concepte d'orientació. Pel seu caràcter de síntesi final, l'article de Clifford (PARRA, 1993: pàgs. 368-370) ocuparà una part essencial de l'exposició, posant especial èmfasi en la necessitat de distingir entre magnituds vectorials (posició, velocitat, força) i magnituds bivectorials (moment angular, camp magnètic). Sobre la rellevància científica del tema i la situació a finals del segle passat ens informa Heaviside (PARRA, 1993: pàgs. 361,371).

4. (Matèria optativa de centre, preferiblement interdisciplinar física-matemàtiques) La noció de camp vectorial; l'operador nabla; potencials i forces; tipus i exemples de camps vectorials (irrotacionals, solenoidals). Resulta raonable assolir, com a objectiu terminal, el càlcul dels potencials i dels camps elèctrics i gravitatoris deguts a distribucions puntuals de masses i càrregues situades en posicions fixes a l'espai.

Completarem el treball tècnic amb el càlcul de diferents casos seleccionats, que il·lustrin els conceptes de gradient, divergència i rotacional, amb la lectura d'un fragment de les *Lectures on Quaternions* de Hamilton on mostra que el Laplacià és el quadrat de l'operador nabla (PARRA, 1993: pàgs. 364-365). I també, per què no, amb la lectura del que més de cent anys després escriurà de l'operador de Laplace, el matemàtic Edward Nelson (1967: pàg. 100): «L'operador de Laplace, en les seves diverses manifestacions, és el més bell i central objecte de tota la matemàtica. La teoria de la probabilitat, la física matemàtica, l'anàlisi de Fourier, les equacions diferencials en derivades parcials, la teoria dels grups de Lie i la geometria diferencial, tots giren en torn d'aquest sol, i la seva llum fins i tot penetra regions tan obscures com la teoria de nombres i la geometria algebraica.» És una font de satisfacció professional que alguns dels nostres alumnes de batxillerat puguin arribar a formular i entendre, en termes tan bàsics com elementals, un objecte matemàtic, un operador diferencial, tan àmpliament utilitzat en la ciència actual.

Lectures per saber i valorar què sabem

5. Un compromís amb la història: reflexió sobre el passat, present i futur del càlcul vectorial.

Tots els temes anteriors constitueixen una mostra d'una matemàtica «de disseny» d'acord amb les indicacions de Leibniz. Una matemàtica que Maxwell s'adonà que era imprescindible per a la nova era electromagnètica. Però la part més substantiva de la creació del llenguatge vectorial correspon a Grassmann, el professor de secundària de Stettin a qui es negà l'accés a la Universitat. Mereixen especial atenció, com a base d' una bona discussió, les consideracions que Grassmann féu el 1844 en el prefaci de la seva *Teoria de l'Extensió* (PARRA, 1998: pàgs. 626-627). Per adonar-nos de la rellevància que per a l'ensenyament de les ciències fisicomatemàtiques del segle XXI tenen l'adequada correcció d'aquests oblits històrics del XIX, pot resultar interessant la lectura d'una part de la *Gibbs Lecture* que Freeman J. Dyson donà el 1972 sota el patrocini de l'ÀMS. La conferència tractà precisament de les oportunitats perdudes d'un contacte fructífer entre les matemàtiques i la física. Dues de les oportunitats perdudes assenyalades per Dyson fan referència directa al tema que ens ocupa: les equacions de Maxwell i el càlcul vectorial. (PARRA, 1993: pàgs. 373-374). Una més actualitzada apreciació de la importància històrica dels encerts i errors comesos per uns i altres és la de Feza Gürsey (1987), un altre destacat físic teòric, qui, a Sant Feliu de Guíxols digué:

«Un altre desenvolupament fonamental tingué lloc de les mans de Clifford, el geni matemàtic anglès de curta vida (1845-1879) que fou capaç d'aconseguir una síntesi dels treballs de Grassmann i Hamilton, dos mestres a qui admirava, introduint les àlgebres de Clifford. Aquesta nova estructura matemàtica acompleix dos objectius: en primer lloc, fa els quaternions rellevants en dimensions superiors a quatre, anticipant la crítica de Gibbs; en segon lloc, ofereix una construcció explícita dels nombres anticommutatius de Grassmann, de quadrat nul. Ambdós descobriments estaven destinats a tenir un paper clau en la física del segle següent. Clifford tenia una visió profètica del paper de les matemàtiques en la física del futur. Seguint a Riemann, considerava la matèria com una manifestació de la curvatura en una varietat espai-temps i va predir noves aplicacions dels nombres hipercomplexos al món natural.»

6. L'espai-temps de quatre dimensions. Les equacions de Maxwell.

A. Pais (1984) proposa explicar als alumnes de secundària algunes de les nocions més elementals de cinemàtica relativista, precisament pel fet que mostren de manera inequívoca com les idees de la nova física van decididament més enllà del sentit comú. L'àlgebra geomètrica permet una tal introducció. Evitant les complicacions tècniques, ens limitarem a l'etapa *romàntica*, per a la qual alguns fragments històrics de Poincaré, Einstein i Minkowski (1952) estan especialment indicats. Amb aquesta mena de fragments, i després de comprovar com resulta de natural l'extensió del càlcul vectorial de tres dimensions a un univers de quatre dimensions (tres d'espai i una temporal), proposem realitzar càlculs geomètrics senzills entorn de viatges estel·lars (paradoxa dels bessons, temps propi de desintegració de partícules). I fins i tot podem concloure, si s'ha tractat prèviament de l'operador nabla, amb l'escriptura formal de les equacions de Maxwell per a la llum, que prenen la forma excepcionalemnt simple *gradient (bivector electromagnètic) = 0*. Llavors, la lectura de l'altre fragment del ja citat article de Dyson ens permet obrir una discussió molt interessant sobre la pròpia història de la ciència: «Però els matemàtics del segle dinou varen fallar miserablement en no copsar l'oportunitat no menys gran que els oferí Maxwell el 1865. Si haguessin pres les equacions de Maxwell tan seriosament com Euler es prengué les de Newton, haurien descobert, entre d'altres coses, la teoria einsteniana de la relativitat especial. [...] Una gran part de la física i matemàtica del segle XX podia haver estat creada en el segle XIX, senzillament explorant fins al final els conceptes matemàtics als quals condueixen de manera natural les equacions de Maxwell.»

Conclusions

En cadascuna de les unitats les lectures històriques comentades han de facilitar que l'alumne, en contacte directe amb el vigor expositiu i la natura essencialment crítica dels veritables creadors del coneixement científic, valori adequadament el seu aprenentatge. Contribueixen, per tant, a la tercera etapa que tanca cadascuna de les unitats del cicle educatiu de Whitehead, en la qual s'adquireix consciència que se sap més enllà dels detalls dels càlculs, i es prepara la ment per a la generalització i l'inici d'una nova unitat o d'un nou cicle educatiu de més abast. Les unitats 5 i 6 contribueixen especialment a una reflexió d'aquest tipus. Globalment considerat, el tractament de les diverses unitats del càlcul vectorial en la forma indicada proporciona una visió de conjunt sobre una relativament àmplia porció de les matemàtiques, de la física, i de la seva íntima relació (a la manera integradora proposada per Maxwell, Russell i Dyson). A més del seu caràcter formatiu té també un caràcter informatiu-orientatiu per a la tria que els alumnes hauran de fer entre diverses opcions d'estudis científics. Es tracta d'apropar-se, en la mesura que altres condicionaments de l'ensenyament ho facin possible, a l'ideal d'educació crítica arrelada en la història expressat per Van der Waerden (PARRA, 1993: pàg. 360).

Referències

CLIFFORD, W. K. (1878), «Applications of Grassmann's extensive algebra», *Amer. J. Math.* núm. 1, pàgs. 350-358 .
CLIFFORD, W. K. (1955), *The Common Sense of Exact Sciences*, New York, Dover.
CROWE, M. J. (1985), *A History of Vector Analysis*, New York, Dover.
DYSON, F. J. (1972), «Missed Opportunities», *Bull. A. M. S.*, núm. 78, pàgs. 635-652.

GÁMEZ, C.; PARRA, J. M. (2000), «Los números complejos y la génesis del cálculo geométrico en el siglo XIX», en prensa.
GÜRSEY, F. (1987), «Quaternionic and Octonionic Structures in Physics». A: DONCEL, M. G. *et al.* (eds.): *Symmetries in Physics (1600-1980)*, Universitat Autònoma de Barcelona-World Scientific.
KLEIN, F. (1974), *Le programme d'Erlangen*, Paris, Gauthier-Villars.
MAXWELL, J. C. (1997), *Escritos Científicos*, Madrid, CSIC.
MINKOWSKI, H. (1952), «Space and Time». A: *The Principle of Relativity*, New York, Dover.
NELSON, E. (1967), *Tensor Analysis*, Princeton University Press.
PAIS, A. (1984), *El Señor es sutil*, Barcelona, Ariel.
PARRA, J. M. (1993), «W. K. Clifford, 1878. L'anella perduda de l'anàlisi vectorial». A: NAVARRO, V. *et al.* (eds.): *Actes de les II Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica* (Peníscola, 1992), Sueca, SCHCT.
PARRA, J. M. (1998), «Àlgebra, física i geometria en la creació del càlcul vectorial al segle XIX». A. BLANES, G. *et al.* (eds.): *Actes de les IV Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica* (Alcoi, 1996), Barcelona, SCHCT.
SÁNCHEZ RON, J. M. (1985), *El origen y desarrollo de la relatividad*, Madrid, Alianza.
TRUESDELL, C. (1968), *Essays in the History of Mechanics*, Berlín, Springer.
WHITEHEAD, A. N. (1957), *Los Fines de la Educación*, Buenos Aires, Paidós.